3.6 สมการโคชี-ออยเลอร์ (Cauchy-Euler Equation)

พิจารณาสมการโคชี-ออยเลอร์ อันดับ n ที่เป็น homogeneous

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0$$

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาสมการโคชี-ออยเลอร์ อันดับ 2

$$\boxed{ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0}$$

โดยที่ a,b,c เป็นค่าคงที่
ถ้าเราแทน $y=x^r$ โดยที่ r เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$ar(r-1)x^r+brx^r+cx^r=0$$

หรือ

$$\Big(ar(r-1)+br+c\Big)x^r=0$$

เราจะได้เงื่อนไขที่ใช้ในการหาค่า r คือ

$$\boxed{ar(r-1)+br+c=0}$$

หรือ

$$\boxed{ar^2+(b-a)r+c=0}$$

เรียกสมการดังกล่าวว่า **characteristic equation** หรือ auxiliary equation ซึ่งจะมีรากหรือคำตอบคือ

$$\boxed{r=r_1,r_2=\frac{-(b-a)\pm\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}}$$

จะเห็นว่าค่า r_1,r_2 มีได้ 3 รูปแบบ ขึ้นอยู่กับค่าของ $\sqrt{(b-a)^2-4ac}$ ดังนี้

กรณีที่ 1 $\boxed{(b-a)^2-4ac>0}$

จะได้ผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ

$$y_1=x^{r_1},\qquad y_2=x^{r_2}$$

และสามารถเช็คได้ว่า $W(x)\neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution คือ

$$\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}}$$

Example 1. $2x^2y''+3xy'-y=0$

Solution. *general solution คือ*

$$y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}$$

กรณีที่ 2 $\boxed{(b-a)^2-4ac=0}$

นั่นคือ

$$r=r_1=r_2=-\frac{(b-a)}{2a}$$

จะได้ผลเฉลย 1 ผลเฉลยคือ

$$y_1=x^{r_1}=x^{-(b-a)/2a}$$

เราสามารถหา y_2 ได้จาก Method of Reduction of Order

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}}{y_1^2}dx=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{b}{ax}dx}}{y_1^2}dx=y_1\ln x$$

และสามารถเช็คได้ว่า $W(x)\neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution คือ

$$\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_1}\ln x}$$

Example 2. $x^2y''+5xy+4y=0,\quad x>0$

Solution. *general solution คือ*

$$y=c_1x^{-2}+c_2x^{-2}\ln x$$

กรณีที่ 3 $\boxed{(b-a)^2-4ac<0}$

นั่นคือ

$$r=r_1,r_2=-\frac{b-a}{2a}\pm\frac{\sqrt{(b-a)^2-4ac}}{2a}=\alpha\pm\beta i$$

จะได้ผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ

$$y_1=x^{r_1}=x^{\alpha+\beta i}=x^\alpha x^{i\beta}=x^\alpha e^{\ln x^{i\beta}}=x^\alpha e^{i(\beta\ln x)}$$
$$y_2=x^{r_2}=x^{\alpha-\beta i}=x^\alpha x^{-i\beta}=x^\alpha e^{\ln x^{-i\beta}}=x^\alpha e^{i(-\beta\ln x)}$$

จาก Euler's formula

$$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$$

ดังนั้นเราสามารถแปลง y_1,y_2 เป็น

$$y_1=x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\Big)$$
$$y_2=x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\Big)$$

ดังนั้น general solution คือ

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

จะเห็นว่า y_1,y_2,y เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน แต่เราต้องการผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง
ถ้าเราเลือก $c_1=\frac{1}{2}$ และ $c_2=\frac{1}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned}y_3&=c_1y_1+c_2y_2\\&=\tfrac{1}{2}x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\Big)+\\&\quad\tfrac{1}{2}x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\Big)\\&=x^\alpha\cos(\beta\ln x)\end{aligned}$$

ถ้าเราเลือก $c_1=\frac{1}{2i}$ และ $c_2=-\frac{1}{2i}$ จะได้

$$\begin{aligned}y_4&=c_1y_1+c_2y_2\\&=\tfrac{1}{2i}x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\Big)-\\&\quad\tfrac{1}{2i}x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\Big)\\&=x^\alpha\sin(\beta\ln x)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า y_3, y_4 เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง และสามารถเช็คได้ว่า $W(x) \neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution ซึ่งเป็นฟังก์ชันจำนวนจริง คือ

$$\boxed{y = c_1y_3 + c_2y_4 = c_1x^\alpha\Big(\cos(\beta\ln x) + c_2\sin(\beta\ln x)\Big)}$$

Example 3. $x^2y'' + xy' + y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของสมการโคชี-ออยเลอร์ ที่เป็น non-homogeneous

Example 4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3\ln x$

Solution. *general solution คือ*

$$y = y_c + y_p$$

3.7 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (Differential Operator)

ในการเขียนอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้าเราให้ $D = \dfrac{d}{dx}$ จะได้ว่า

$$\boxed{Dy = \frac{dy}{dx}}$$

เราเรียก D ว่า differential operator

พิจารณา

$$\begin{aligned} De^{ax} &= ae^{ax} \\ De^{ax} - ae^{ax} &= 0 \\ (D-a)e^{ax} &= 0 \end{aligned}$$

ถ้าเทียบกับ DE

$$(D-a)y = 0$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

จะกล่าวได้ว่า $\boxed{(D-a)y = 0 \text{ มี solution คือ } e^{ax}}$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (D-1)(D-2)e^x &= (D-2)(D-1)e^x &&= (D-2)0 = 0 \\ (D-1)(D-2)e^{2x} &= (D-1)0 &&= 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $e^x,\ e^{2x}$ เป็น solutions ของ $(D-1)(D-2)y = 0$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{array}{l} (D-a_1)(D-a_2)\ldots(D-a_n)y = 0 \\ \text{มี solution คือ } e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx} \end{array}}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} D^2 1 &= D(D1) &&= D(0) = 0 \\ D^2 x &= D(Dx) &&= D(1) = 0 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $1,\ x$ เป็น solutions ของ $D^2y = 0$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{array}{l} D^ny = 0 \\ \text{มี solution คือ } 1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} \end{array}}$$

Example 5. $D^5y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (D-a)^2e^{ax} &= (D-a)(D-a)e^{ax} &&= \ldots = 0 \\ (D-a)^2xe^{ax} &= (D-a)(D-a)xe^{ax} &&= \ldots = 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{array}{l} (D-a)^2y = 0 \\ \text{มี solution คือ } e^{ax}, xe^{ax} \end{array}}$$

Example 6. $(D+3)^2y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} D^2\cos bx &= D(D\cos bx) &&= D(-b\sin bx) = -b^2\cos bx \\ D^2\sin bx &= D(D\sin bx) &&= D(b\cos bx) = -b^2\sin bx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{array}{l} (D^2+b^2)y = 0 \\ \text{มี solution คือ } \cos bx,\ \sin bx \end{array}}$$

Example 7. $(D^2+5)^2y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1\cos\sqrt{5}x + c_2\sin\sqrt{5}x$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \Big[(D-a)^2 + b^2\Big]e^{ax}\cos bx &= \ldots &&= 0 \\ \Big[(D-a)^2 + b^2\Big]e^{ax}\sin bx &= \ldots &&= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\begin{array}{l} \Big[(D-a)^2 + b^2\Big]y = 0 \\ \text{มี solution คือ } e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx \end{array}}$$

Example 8. $(D^2+4D+9)y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$$
