

## 3.5 วิธีการผันแปรของพารามิเตอร์

## 3.5 วิธีการผันแปรของพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)

วิธี Variation of Parameters เป็นวิธีที่ใช้หาผลเฉลยของ non-homogeneous linear DE อันดับ 2 โดยมีตัวแปรต้นคือ  $x$  นั่นคือ DE ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x)$$

โดยที่ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันใดๆ และ **รู้** เทอม  $y_1, y_2$  ซึ่งเป็นผลเฉลยของ homogeneous DE **มาก่อน** นั่นคือ

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

จาก  $y_1, y_2$  เราสามารถเขียน

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$$

ในวิธี Variation of Parameters เราจะเขียน  $y_p$  โดยผันแปรเทอม  $c_1, c_2$  เป็นพารามิเตอร์  $u_1, u_2$  ดังนี้

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

เราจะหา  $u_1, u_2$  โดยสร้างเงื่อนไขขึ้นมา 2 เงื่อนไข ดังกระบวนการต่อไปนี้

$$y_p' = \underbrace{u_1'y_1 + u_1y_1'} + \underbrace{u_2'y_2 + u_2y_2'}$$

เงื่อนไขแรก เราจะให้

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1y_1' + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1'y_1 + u_1y_1'' + u_2'y_2 + u_2y_2'' \\ &= u_1'y_1 + u_1\left(-p(x)y_1' - q(x)y_1\right) + \\ &\quad u_2'y_2 + u_2\left(-p(x)y_2' - q(x)y_2\right) \\ &= u_1'y_1 - p(x)\left(u_1y_1' + u_2y_2'\right) + \\ &\quad u_2'y_2 - q(x)\left(u_1y_1 + u_2y_2\right) \\ &= u_1'y_1 - p(x)y_p' + \\ &\quad u_2'y_2 - q(x)y_p \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้เงื่อนไขที่สอง คือ

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = \boxed{u_1'y_1 + u_2'y_2 = g(x)}$$

เราสามารถหา  $u_1', u_2'$  ได้จาก Cramer's rule ดังนี้

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

และหา  $u_1, u_2$  ได้จากการอินทิเกรต  $u_1', u_2'$

Example 1.  $y'' + y = \tan x$

Solution.

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x \\ y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned}$$

เกิดเป็นเงื่อนไขในการหา  $u_1, u_2$  คือ

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= \tan x \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_1 &= -\left(\ln|\sec x + \tan x| - \sin x\right) \\ u_2 &= -\cos x \end{aligned}$$

Example 2.  $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$

Solution.

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} \\ y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned}$$

เกิดเป็นเงื่อนไขในการหา  $u_1, u_2$  คือ

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= (x+1)e^{2x} \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \\ u_2 &= -\frac{1}{2}x^2 + x \end{aligned}$$

Example 3.  $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

Solution.

$$\begin{aligned} y_c &= c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2xe^x \\ y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \end{aligned}$$

เกิดเป็นเงื่อนไขในการหา  $u_1, u_2$  คือ

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= e^x \ln x \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x \\ u_2 &= x \ln x - x \end{aligned}$$

Example 4.  $y'' + y = \cos^3 x$

Solution.

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2xe^x$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\cos^3 x}{3} \\ u_2 &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \end{aligned}$$

Example 5.  $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$

Solution.

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

$$u_1 = \ln(1 + e^x) - e^x$$

$$u_2 = \ln(1 + e^x)$$

Example 6.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

Solution.

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$u_1 = -\frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$u_2 = \tan^{-1} x$$

Example 7.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

Solution.

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$u_1 = -\frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2$$

$$u_2 = x \ln x - x$$