## 3.4 วิธีเทียบสัมประสิทธิ์

วิธี Undetermined Coefficients เป็นวิธีที่ไว้ใช้หาผลเฉลยของ non-homogeneous linear DE อันดับ $n$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยที่มีตัวแปรต้นคือ $x$ นั่นคือ DE ในรูป

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งในสามกลุ่มหลักต่อไปนี้ คือ (1) polynomial, (2) cos หรือ sin, (3) exponential

| $f(x)$ | family functions | $y_p$ ที่สมมติ |
|---|---|---|
| polynomial (degree $n$) | | |
| ค่าคงที่ | $1$ | $y_p = A$ |
| linear function | $x, 1$ | $y_p = Ax + B$ |
| quadratic function | $x^2, x, 1$ | $y_p = Ax^2 + Bx + C$ |
| $\cos bx$ | $\cos bx, \sin bx$ | $y_p = A\cos bx + B\sin bx$ |
| $\sin bx$ | $\cos bx, \sin bx$ | $y_p = A\cos bx + B\sin bx$ |
| $e^{ax}$ | $e^{ax}$ | $y_p = Ae^{ax}$ |
| ผลบวกหรือผลคูณ ของสามกลุ่มข้างต้น | | |

**ข้อสังเกต** ไม่ว่าเราจะหา derivative ของ family functions กี่ครั้งก็ตาม ก็ยังจะได้ฟังก์ชันที่อยู่ในกลุ่ม family functions เหมือนเดิม

Example 1. $y'' + 5y' + 6y = 2x + 1$

Solution.

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x}$$
$$y_p = Ax + B = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 2. $y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$

ตัวอย่างต่อไปจะเป็นกรณีที่เกิดปัญหาขึ้นมา ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้

Example 3. $y'' = 1$

Example 4. $y'' - 9y = e^{3x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^{-3x} + c_2e^{3x}$$
$$y_p = Axe^{3x} = \tfrac{1}{4}xe^{3x}$$
$$y = y_c + y_p$$

**สรุป** ให้นำ $x^n$ มาคูณกับ $y_p$ ที่สมมติ ได้เป็น $y_p$ เทอมใหม่ (โดยที่ $n$ เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $y_p$ เทอมใหม่ไม่มีเทอมที่ซ้ำกันกับเทอมใน $y_c$)

Example 5. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$$
$$y_p = Ax^2e^{3x}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 6. $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{3x}$$
$$y_p = (Ax + B) + (Cx + D)e^{2x}$$
$$y_p = -\tfrac{4}{3}x + \tfrac{23}{9} - (2x + \tfrac{4}{3})e^{2x}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 7. $y'' + 4y = x\cos x$

Solution.

$$y_c = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$$
$$y_p = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 8. $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$$
$$y_p = (Ax^2 + Bx + C) + (Ex^2)e^{3x}$$
$$y_p = \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{8}{9}x + \tfrac{2}{3} - 6x^2e^{3x}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 9. $y^{(4)} + y''' = 1 - x^2e^{-x}$

Solution.

$$y_c = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-x}$$
$$y_p = Ax^3 + (Bx^3 + Cx^2 + Dx)e^{-x}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 10. $y'' + y = 2x\sin x$

Solution.

$$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$
$$y_p = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x$$
$$y_p = -\tfrac{1}{2}x^2\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 11. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}$$
$$y_p = A + Bxe^x + Cxe^{2x}$$
$$y_p = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{3}xe^x + \tfrac{1}{4}xe^{2x}$$
$$y = y_c + y_p$$

Example 12. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$

Solution.

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$
$$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x}$$
$$y_p = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2e^{-2x}$$
$$y = y_c + y_p$$