3.2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ 3.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

พิจารณาสมการ linear DE อันดับ n

$$a_0(t)\frac{d^ny}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_n(t)y=f(t)$$

พิจารณาสมการ linear DE อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_ny=f(t)$$

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาสมการ homogeneous linear DE อันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$\boxed{a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=0}$$

โดยที่ a, b, c เป็นค่าคงที่
ถ้าเราแทน $y=e^{rx}$ โดยที่ r เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0$$

หรือ

$$\Big(ar^2+br+c\Big)e^{rx}=0$$

เราจะได้เงื่อนไขที่ใช้ในการหาค่า r คือ

$$\boxed{ar^2+br+c=0}$$

เรียกสมการดังกล่าวว่า **characteristic equation** หรือ auxiliary equation ซึ่งจะมีรากหรือคำตอบคือ

$$\boxed{r=r_1,r_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

จะเห็นว่าค่า r_1, r_2 มีได้ 3 รูปแบบ ขึ้นอยู่กับค่าของ $\sqrt{b^2-4ac}$ ดังนี้

<u>**กรณีที่** 1</u> $\boxed{b^2-4ac>0}$
จะได้ผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ

$$y_1=e^{r_1t},\quad y_2=e^{r_2t}$$

และสามารถเช็คได้ว่า $W(t)\neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution คือ

$$\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}}$$

Example 1. $y''-6y+8y=0$

Solution. *general solution คือ*

$$y=c_1e^{2t}+c_2e^{4t}$$

<u>**กรณีที่** 2</u> $\boxed{b^2-4ac=0}$
นั่นคือ

$$r=r_1=r_2=-\frac{b}{2a}$$

จะได้ผลเฉลย 1 ผลเฉลยคือ

$$y_1=e^{r_1t}=e^{-(b/2a)t}$$

เราสามารถหา y_2 ได้จาก Method of Reduction of Order

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt}}{y_1^2}dt=y_1\int\frac{e^{-\int\frac{b}{a}dt}}{y_1^2}dt=ty_1$$

และสามารถเช็คได้ว่า $W(t)\neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution คือ

$$\boxed{y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{r_1t}+c_2te^{r_2t}}$$

Example 2. $y''-8y+16y=0$

Solution. *general solution คือ*

$$y=c_1e^{4t}+c_2te^{4t}$$

Example 3. $y''=0$

Solution. *general solution คือ*

$$y=c_1+c_2t$$

<u>**กรณีที่** 3</u> $\boxed{b^2-4ac<0}$
นั่นคือ

$$r=r_1,r_2=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\alpha\pm\beta i$$

จะได้ผลเฉลย 2 ผลเฉลยคือ

$$y_1=e^{r_1t}=e^{(\alpha+\beta i)t}$$
$$y_2=e^{r_2t}=e^{(\alpha-\beta i)t}$$

จาก Euler's formula

$$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$$

ดังนั้นเราสามารถแปลง y_1, y_2 เป็น

$$y_1=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)$$
$$y_2=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t-i\sin\beta t\right)$$

ดังนั้น general solution คือ

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

จะเห็นว่า y_1, y_2, y เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน แต่เราต้องการผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง
ถ้าเราเลือก $c_1=\frac{1}{2}$ และ $c_2=\frac{1}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned}y_3&=c_1y_1+c_2y_2\\&=\tfrac{1}{2}e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)+\tfrac{1}{2}e^{\alpha t}\left(\cos\beta t-i\sin\beta t\right)\\&=e^{\alpha t}\cos\beta t\end{aligned}$$

ถ้าเราเลือก $c_1 = \frac{1}{2i}$ และ $c_2 = -\frac{1}{2i}$ จะได้

$$\begin{aligned} y_4 &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= \tfrac{1}{2i} e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) - \tfrac{1}{2i} e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t) \\ &= e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

จะเห็นว่า y_3, y_4 เป็นฟังก์ชันจำนวนจริง และสามารถเช็คได้ว่า $W(t) \neq 0$ นั่นคือผลเฉลยทั้งสองไม่ซ้ำกัน ดังนั้น general solution ซึ่งเป็นฟังก์ชันจำนวนจริง คือ

$$\boxed{y = c_1 y_3 + c_2 y_4 = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t}$$

Example 4. $y'' + k^2 y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$$

Example 5. $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 10 \end{cases}$

Solution. *solution คือ*

$$y = 5e^{3t} \sin 2t$$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของ homogeneous linear DE อันดับที่สูงกว่า 2

Example 6. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3$$

Example 7. $y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}$$

Example 8. $y^{(4)} - y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

Example 9. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Solution. *general solution คือ*

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t$$