

3.1 ทฤษฎีพื้นฐานของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

3.1 ทฤษฎีพื้นฐานของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

พิจารณาสมการ linear DE อันดับ n

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = f(t)$$

โดยที่ $a_0(t) \neq 0$ สำหรับทุกค่า t ในช่วง I หนึ่ง สมการดังกล่าวเรียกว่า สมการ non-homogeneous ($f(t) \neq 0$) ถ้า $f(t) = 0$ จะเรียกว่าสมการ homogeneous

เราเรียก $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ ว่าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ (coefficient functions) และเรียก $a_0(t)$ ว่าฟังก์ชันสัมประสิทธิ์นำ (leading coefficient functions)

Example 1. $y'' + k^2y = 0$

Solution. $y_1 = \cos kx, y_2 = \sin kx$ เป็นผลเฉลย

Example 2. $y'' - k^2y = 0$

Solution. $y_1 = e^{kx}, y_2 = e^{-kx}$ เป็นผลเฉลย

Theorem 3. Existence and Uniqueness of solution (การมีจริงของผลเฉลยและมีเพียงผลเฉลยเดียว)

พิจารณา IVP:

$$\begin{cases} a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ให้ $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ และ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_0(t) \neq 0$ สำหรับทุกค่า t ในช่วง I ถ้า t_0 เป็นจุดใดๆในช่วง I แล้วจะได้ว่า ผลเฉลยของ IVP ดังกล่าวมีจริง (exist) บน I และมีเพียงผลเฉลยเดียว (unique)

Example 4. IVP $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Solution. $y = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$ เป็นผลเฉลยเดียวของ IVP บนช่วง I ใดๆที่รวมจุด $t = 0$

Example 5. IVP $\begin{cases} 5y''' - 7y'' + 2y' + y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) = 0 \end{cases}$

Solution. $y = 0$ เป็นผลเฉลยเดียวของ IVP บนช่วง I ใดๆที่รวมจุด $t = 1$

Definition 1. เรียกผลเฉลยที่เป็น 0 สำหรับทุกค่า t บนช่วง I ว่าผลเฉลยชัดเจน (trivial solution) เขียนแทนด้วย $y \equiv 0$

ข้อสังเกต homogeneous linear DE อันดับ n มีผลเฉลยชัดเจน (trivial solution) เป็นผลเฉลยหนึ่งเสมอ

Definition 2. ให้ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ เป็นฟังก์ชัน เราเรียก

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

ว่า Wronskian (รอนเสกียน)

Theorem 6. ให้ y_1, y_2, \dots, y_n เป็นผลเฉลยของ linear DE อันดับ n บนช่วง I จะได้ว่า ผลเฉลยทั้ง n ตัวดังกล่าวจะไม่ซ้ำกันก็ต่อเมื่อ $W(t) \neq 0$ ทุกค่า t ในช่วง I

Example 7. $y'' - y = 0$

จงเปรียบเทียบผลเฉลย 2 ชุดระหว่าง $y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}$ และ $y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}, y_3 = 5e^t$

หมายเหตุ ต่อไปนี้เราจะสนใจสมการ homogeneous ก่อน คือ

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t)y = 0$$

Theorem 8. Superposition Principle (หลักการทับซ้อน)

ถ้า y_1, y_2, \dots, y_n เป็นผลเฉลยของ homogeneous linear DE อันดับ n แล้วจะได้ว่า $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ เป็นผลเฉลยด้วย

Proof. พิจารณากรณี $n = 2$ □

Theorem 9. Abel's formula สำหรับกรณี $n = 2$

$$\left(a_0(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0 \right)$$

จะได้ว่า

$$W(t) = ce^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$$

Proof. ให้ y_1, y_2 เป็นผลเฉลยที่ไม่ซ้ำกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} W(t) &= y_1y_2' - y_2y_1' \\ W'(t) &= y_1y_2'' - y_2y_1'' = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}W(t) \end{aligned}$$

□

Example 10. จงหา $W(t)$ ของ $y'' - y = 0$

Definition 3. ให้ y_1, y_2, \dots, y_n เป็นผลเฉลยที่ไม่ซ้ำกันของ homogeneous linear DE อันดับ n เราเรียก $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ ว่าผลเฉลยบริบูรณ์ (complete solution) หรือผลเฉลยทั่วไป (general solution)

Method of Reduction of Order สำหรับกรณี $n = 2$

ให้ y_1, y_2 เป็นผลเฉลยที่ไม่ซ้ำกันของ homogeneous linear DE อันดับ 2 เราสามารถหา Wronskian ได้จากนิยามและจาก Abel's formula ดังนี้

$$W(t) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}$$

ถ้าเรารู้ y_1 เราจะได้ linear DE อันดับ 1 ในรูปของตัวแปร y_2 คือ

$$y_2' - \frac{y_1'}{y_1} y_2 = \frac{e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}}{y_1}$$

ดังนั้น

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt}}{y_1^2} dt$$

Example 11. จงหา general solution ของ $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ โดยที่ x^{-2} เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

หมายเหตุ ต่อไปนี้จะสนใจสมการ non-homogeneous คือ

$$a_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + a_n(t) y = f(t)$$

Theorem 12. ให้ y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของ non-homogeneous linear DE อันดับ n ถ้า y_1, y_2, \dots, y_n เป็นผลเฉลยที่ไม่ซ้ำกันของ homogeneous linear DE อันดับ n แล้วจะได้ว่าผลเฉลยทั่วไป (general solution) ของ non-homogeneous linear DE อันดับ n ดังกล่าวคือ

$$y = \underbrace{c_1 y_1 + \dots + c_n y_n}_{y_c} + y_p$$

เรียก y_c ว่าผลเฉลยเติมเต็ม (complimentary solution) และเรียก y_p ว่าผลเฉลยเฉพาะ (particular solution)

Proof. ให้ y เป็นผลเฉลยใดๆของ non-homogeneous linear DE อันดับ n และ y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของ non-homogeneous linear DE อันดับ n เดียวกัน จะได้ว่า

$$a_0(t) \frac{d^n (y - y_p)}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} (y - y_p)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{d(y - y_p)}{dt} + a_n(t) (y - y_p) = 0$$

นั่นคือ $y - y_p$ เป็นผลเฉลยของ homogeneous linear DE อันดับ n ดังนั้น

$$y - y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$$

□