2.8 วิธีการแทนค่า

โดยทั่วไปแล้วสมการ DE อันดับ 1 ที่เป็น non-linear จะหาผลเฉลยได้ยาก แต่ในบางกรณีเราสามารถใช้**วิธีการเปลี่ยนหรือแทนตัวแปร** เพื่อลดรูปเป็น DE แบบ separable หรือ exact หรือ linear หรือ Bernoulli หรือ homogeneous ซึ่งเป็นสมการที่เราสามารถหาผลเฉลยได้ โดยทั่วไปแล้วการเปลี่ยนตัวแปรดังกล่าวจะไม่มีหลักเกณฑ์ที่เฉพาะเจาะจง จะมีบางกรณีที่เราสามารถลดรูป DE ให้เป็นแบบ separable ได้โดยแทนตัวแปร $u = ax + by$ ดังนี้

$$y' = G(ax + by) \qquad (1)$$

ถ้าแทนตัวแปรด้วย

$$u = ax + by \quad \Rightarrow \quad u' = a + by'$$

ดังนั้นสมการ (1) ลดรูปเป็น DE แบบ separable

$$\frac{du}{a + bG(u)} = dx$$

Example 1. *จงหาผลเฉลยของ*

$$y' - (4x - y + 1)^2 = 0$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = 4x - y$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{du}{(u+1)^2 - 4} + xu = -dx$ *(separable)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $y = 4x - \dfrac{1 + 3ce^{-4x}}{1 - ce^{-4x}}$

Example 2. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} + x(y - x) + x^3(y - x)^2 = 1$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = y - x$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{dy}{dx} + xu = -x^3u^2$ *(Bernoulli)*

Example 3. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} + 1 = xe^{(x+y)}$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = x + y$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $e^{-u}du = xdx$ *(separable)*

Example 4. *จงหาผลเฉลยของ*

$$y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = 2xy$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{1-u}{u^2}du = -\dfrac{2}{x}dx$ *(separable)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $x = cye^{\frac{1}{2xy}}$

Example 5. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = sin^2(3x - 3y + 1)$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = 3x - 3y + 1$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\sec^2 u du = 3dx$ *(separable)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $y = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\arctan(3x + c)$

Example 6. *จงหาผลเฉลยของ*

$$2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = y^2$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{du}{dx} + \dfrac{2}{x}u = 3 - \dfrac{6}{x}$ *(linear)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $x^2y^2 = x^3 - 3x^2 + c$

Example 7. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x\sin y + \sin^2 y}{2x^2\cos y}$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = \sin y$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{u}{x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u}{x}\right)^2$ *(homogeneous)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $\left(\dfrac{\sin y}{\sin y + 3x}\right)^2 = \left|\dfrac{c}{x}\right|^3$

Example 8. *จงหาผลเฉลยของ*

$$(1 + 3x\sin y)dx - (x^2\cos y)dy = 0$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = \sin y$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{du}{dx} - \dfrac{3}{x}u = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u}{x}\right)^2$ *(homogeneous)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $\left(\dfrac{\sin y}{\sin y + 3x}\right)^2 = \left|\dfrac{c}{x}\right|^3$

Example 9. *จงหาผลเฉลยของ*

$$2y\frac{dy}{dx} = y^2 + x - 1$$

Solution.

$\Rightarrow$ *แทนตัวแปร:* $u = y^2 + x - 1$

$\Rightarrow$ *สมการใหม่:* $\dfrac{du}{u+1} = dx$ *(separable)*

$\Rightarrow$ *ผลเฉลย:* $y^2 = ce^x - x$