2.7 สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเชิงเส้น 2 ตัวแปร

สมการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นเชิงเส้น 2 ตัวแปร คือ DE ที่อยู่ในรูป

$$(A_1x + B_1y + C_1)dx + (A_2x + B_2y + C_2)dy = 0$$

โดยที่ A, B, C ต่างๆ เป็นค่าคงที่
DE ดังกล่าวสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \tag{1}$$

โดยที่ a, b, c ต่างๆ เป็นค่าคงที่
กรณีที่ 1 ถ้า $c_1 = c_2 = 0$ จะได้ว่า DE (1) ลดรูปเป็นสมการ homogeneous ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}$$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการหาผลเฉลยได้โดยการแทนด้วยตัวแปรใหม่ $v = \frac{y}{x}$ และจัดรูปจนได้สมการแบบ separable

Example 1. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{3x + y}$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } (y - x)^2 = c(y + x)$$

กรณีที่ 2 ถ้า $c_1 \neq 0$ หรือ $c_2 \neq 0$ จะได้ว่า DE (1) ไม่เป็นสมการ homogeneous แต่เรายังสามารถแก้สมการดังกล่าวได้ โดยลดรูปให้เป็นสมการ homogeneous และใช้แนวคิดเรื่องสมการเส้นตรงกับเทอมสัมประสิทธิ์เป็นเชิงเส้น 2 ตัวแปร ดังนี้
เราสามารถมองเทอมสัมประสิทธิ์ที่เป็นเชิงเส้นใน 2 ตัวแปรเป็นสมการของเส้นตรง 2 เส้นในระบบพิกัด xy คือ

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2.1 เส้นตรงทั้งสองตัดกัน ($a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) โดยมีจุดตัดคือ (h, k) ถ้าเราเปลี่ยนจากระบบพิกัด xy ไปเป็นระบบพิกัดใหม่ uv ซึ่งมีจุดกำเนิดที่จุด (h, k) โดยการแปลงดังนี้

$$\begin{aligned} u = x - h \quad &\Rightarrow \quad x = u + h \qquad (dx = du) \\ v = y - k \quad &\Rightarrow \quad y = v + k \qquad (dy = dv) \end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1(u + h) + b_1(v + k) + c_1 &= 0 \\ a_2(u + h) + b_2(v + k) + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากจุด (h, k) อยู่บนเส้นตรงทั้งสอง จะได้ว่า $a_1h+b_1k+c_1 = 0$ และ $a_2h + b_2k + c_2 = 0$ ดังนั้นสมการของเส้นตรงทั้งสองในระบบพิกัด uv ลดรูปเป็น

$$\begin{aligned} a_1u + b_1v &= 0 \\ a_2u + b_2v &= 0 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรานำการแปลงข้างต้นมาแปลง DE (1) จากตัวแปร x, y ให้เป็น u, v จะได้ว่า

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v} \tag{2}$$

DE (2) เป็น homogeneous ซึ่งเราสามารถแก้สมการหาผลเฉลยได้เช่นเดียวกันกับกรณีที่ 1 โดยการแทนด้วยตัวแปรใหม่ $z = \dfrac{v}{u}$
กรณีที่ 2.2 เส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกัน หรือขนานกัน ($a_1b_2 - a_2b_1 = 0$) นั่นคือ เส้นตรงทั้งสองมีความชันเดียวกัน ดังนั้นจะมีค่าคงที่ $k \neq 0$ ที่ทำให้

$$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y)$$

DE (1) จะแปลงรูปสมการได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2} \tag{3}$$

ขั้นตอนต่อไปนี้สามารถทำได้ 2 วิธี คือ
วิธี 1 แทนด้วยตัวแปรใหม $z = a_1x + b_1y$ จะได้ว่า

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right)$$

DE (3) แปลงได้เป็น

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx} - a_1\right) = \frac{z + c_1}{kz + c_2}$$

ซึ่งสามารถจัดรูปเป็นสมการแบบ separable และหาผลเฉลยได้
วิธี 2 แทนด้วยตัวแปรใหม่ $v = a_1x + b_1y + c_1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v = a_1x + b_1y + c_1 \quad &\Rightarrow \quad y = \frac{1}{b_1}(v - a_1x - c_1) \\ \frac{dv}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx} - a_1\right) \end{aligned}$$

DE (3) แปลงได้เป็น

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dv}{dx} - a_1\right) = \frac{v}{k(v - c_1) + c_2}$$

ซึ่งสามารถจัดรูปเป็นสมการแบบ separable และหาผลเฉลยได้เช่นเดียวกัน

หมายเหตุ กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 (รวมทั้ง 2.1 และ 2.2) สามารถใช้ได้กับ DE ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Example 2. *จงหาผลเฉลยของ*

$$xye^{x/y}dx + \left(y^2 - x^2e^{x/y}\right)dy = 0$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{e^{x/y}(y - x)}{y}$$

Example 3. *จงหาผลเฉลยของ*

$$(-3x + y + 6)\,dx + (x + y + 2)\,dy = 0$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } \left(\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{y+3}{x-1}\right) - 3\right)^{1/2} = \frac{c}{x-1}$$

Example 4. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-2y+3}{x-y+1}$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } 2x - y - \ln|x-y+2| = c$$

Example 5. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x+y-1}{x+y+1}}$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } (x+y)\sqrt{(x+y)^2-1}$$
$$- \ln\left(x+y+\sqrt{(x+y)^2-1}\right) - (x+y+1)^2 + 4x = c$$

Example 6. *จงหาผลเฉลยของ*

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+1}{x+y-2}\right)^2$$

Solution.

$$\Rightarrow \textit{ผลเฉลย: } 2\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-3}\right) = -\ln\left(\frac{y+1}{c}\right)$$