

2.5 สมการของเบอร์นูลลี 2.6 สมการแบบเอกพันธ์

2.5 สมการของเบอร์นูลลี

ให้ n เป็นจำนวนจริงใดๆ สมการเบอร์นูลลีคือ DE ในรูป

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^n \quad (1)$$

กรณีที่ 1 ถ้า $n = 0$ จะได้ว่า DE (1) เป็น linear และมีสมการคือ

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (2)$$

กรณีที่ 2 ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า DE (1) เป็น linear และมีสมการคือ

$$\frac{dy}{dt} + (p(t) - q(t))y = 0 \quad (3)$$

เราสามารถแก้สมการทั้ง (2) และ (3) ได้ โดยใช้วิธีการแก้สมการแบบ linear
กรณีที่ 3 ถ้า $n \neq 0, 1$ จะได้ว่า DE (1) เป็น non-linear แต่เราสามารถลดรูปให้เป็น DE ที่เป็น linear ได้ โดยการแทนด้วยตัวแปรใหม่ ดังนี้

$$v = y^{1-n} \quad (4)$$

หาอนุพันธ์โดยใช้ chain rule ได้ดังนี้

$$v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dy^{1-n}}{dy} \frac{dy}{dt} = (1-n)y^{-n}y'$$

จะได้ว่า

$$y' = \frac{1}{1-n}y^n v'$$

แทน y' ลงใน DE (1) จะได้

$$\frac{1}{1-n}y^n v' + p(t)y = q(t)y^n$$

หารตลอดด้วย y^n และใช้ (4) จะได้

$$\frac{1}{1-n}v' + p(t)v = q(t)$$

คูณตลอดด้วย $1-n$ จะได้

$$v' + (1-n)p(t)v = (1-n)q(t) \quad (5)$$

จะเห็นว่า DE (5) เป็น linear ซึ่งเราสามารถแก้สมการหา v ได้ และได้ผลเฉลย y คือ

$$y = v^{1/(1-n)}$$

Example 1. จงหาผลเฉลยของ $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 3t^2y^3$

Solution.

$$\Rightarrow \text{ผลเฉลย: } y(t) = \pm \sqrt{\frac{1}{ct^2 - 6t^3}}$$

Example 2. จงหาผลเฉลยของ $y' + ty = \frac{t}{y^3}, y(1) = 2$

Solution.

$$\Rightarrow \text{ผลเฉลย: } y(t) = \left(1 + 15e^{2-2t^2}\right)^{1/4}$$

Example 3. จงหาผลเฉลยของ $y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy^3 = 6x, y(0) = -1$

Solution.

$$\Rightarrow \text{ผลเฉลย: } e^{3x^2}y^3 = 3e^{3x^2} - 4$$

Example 4. จงหาผลเฉลยของ $x dy - (y + xy^3(1 + \ln x)) dx = 0$

Solution.

$$\Rightarrow \text{ผลเฉลย: } \frac{x^2}{y^2} = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ln x + c$$

2.6 สมการแบบเอกพันธ์

สมการแบบเอกพันธ์ (homogeneous equation) คือ DE ที่อยู่ในรูป

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6)$$

เราสามารถแก้สมการดังกล่าวโดยการแทนด้วยตัวแปรใหม่ คือ

$$v = \frac{y}{x} \quad (7)$$

และจัดรูปสมการให้เป็น DE แบบ separable ซึ่งเราสามารถแก้สมการหา v ได้ และจะมีผลเฉลยคือ

$$y = vx$$

ขั้นตอนต่อไปนี้เป็นการจัดรูปสมการเพื่อหา v เราสามารถหา y' ได้จากสมการ (7) คือ

$$y' = v + xv'$$

แทน y' ใน DE (6) จะได้

$$v + xv' = F(v)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$xv' = F(v) - v$$

หรือในรูป separable equation คือ

$$\frac{v'}{F(v) - v} = \frac{1}{x}$$

อินทิเกรตทั้งสองข้างเพื่อหา v ในรูป implicit formula ได้เป็น

$$\int \frac{v'}{F(v) - v} dv = \ln|x| + c$$

Example 5. จงหาผลเฉลยของ $x^2y' = y^2 + xy, y(1) = 1$

Solution.

$$\Rightarrow \text{homogeneous equation: } y' = \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \text{ผลเฉลย: } y = \frac{-x}{\ln|x| - 1}$$