4.3 การแปลงทั่วถึง, การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง และการแปลงประกอบ (Onto transformation, one-to-one transformation and composite transformations)

บทนิยาม 1 (การแปลงทั่วถึง (Onto transformation)).
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A *เราเรียก* T *ว่า* ***การแปลงทั่วถึง (onto transformation)*** *ก็ต่อเมื่อ*

$$\operatorname{ran}\mathsf{T} = \mathbb{R}^m$$

ทฤษฎีบท 1 (เงื่อนไขการแปลงทั่วถึง).
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A *ถ้า* $m \leq n$ *และ* $\operatorname{rank}\mathsf{T} = m$ *แล้ว* T *เป็นการแปลงทั่วถึง*

ตัวอย่าง 2.
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *ว่า* $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *การแปลง* T *เป็นการแปลงทั่วถึงหรือไม่?*

วิธีทำ. *สังเกตว่า* $n = 3$ *และ* $m = 2$ *ซึ่ง* $m < n$ *และจากตัวอย่างในบทเรียนก่อน เราคำนวณไว้แล้วว่า* $\operatorname{rank}\mathsf{T} = 2$ *ดังนั้น* T *เป็นการแปลงทั่วถึง* ■

บทนิยาม 2 (การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (One-to-one transformation)).

ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลง เราเรียก* T *ว่า* ***การแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one transformation)*** *บน* $\mathbb{R}^n$ *ก็ต่อเมื่อ*

$$\text{ถ้า } \mathsf{T}(\boldsymbol{u}_1) = \mathsf{T}(\boldsymbol{u}_2) \text{ แล้ว } \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$$

สำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{u}_1$ *และ* $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{R}^n$

ทฤษฎีบท 3 (เงื่อนไขการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง).
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A *การแปลง* T *เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ*

$$\ker\mathsf{T} = \{\,\boldsymbol{0}\,\} \subset \mathbb{R}^n$$

ตัวอย่าง 4.
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ว่า* $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *การแปลง* T *เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่?*

วิธีทำ. *เราสามารถแสดงได้ว่า* $\ker\mathsf{T} = \{\,\boldsymbol{0}\,\}$ *นั่นคือ* T *เป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง* ■

บทนิยาม 3 (การแปลงประกอบ (Composite transformations)).
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น*
ให้ $\mathsf{S}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น*
*เรานิยาม**การแปลงประกอบ (composite transformation)***

$$\mathsf{S}\circ\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

ว่า $(\mathsf{S}\circ\mathsf{T})(\boldsymbol{x}) = \mathsf{S}(\mathsf{T}(\boldsymbol{x}))$ *สำหรับ* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

ทฤษฎีบท 5.
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A
ให้ $\mathsf{S}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* B
การแปลงประกอบ (composite transformation) $\mathsf{S}\circ\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมริกซ์ตัวแทนคือ* $\mathsf{B}A$

ตัวอย่าง 6.
ให้

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \qquad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

และนิยามการแปลง $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *และ* $\mathsf{S}(\boldsymbol{y}) = \mathsf{B}\boldsymbol{y}$ *จงหาการแปลงประกอบ* $(\mathsf{S}\circ\mathsf{T})\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

วิธีทำ. *พิจารณาในห้องเรียน*