เคอร์เนล และเรนจ์ (Kernel and range)

บทนิยาม 1 (เคอร์เนล และเรนจ์ (Kernel and range))**.**
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A
$\boxed{\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}}$
เรานิยาม ***เคอร์เนล*** *(kernel) ของ* T *เขียนแทนด้วย* $\ker \mathsf{T}$ *และหมายถึง*

$$\ker \mathsf{T} = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

ถ้าเขียน $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$ *โดยที่* $A_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ *คือเวกเตอร์แนวตั้งจากคอลัมน์ของ* A
เรานิยาม ***เรนจ์*** *(range) ของ* T *เขียนแทนด้วย* $\operatorname{ran} \mathsf{T}$ *และหมายถึง*

$$\operatorname{ran} \mathsf{T} = \operatorname{span}\{\, A_1, A_2, \ldots, A_n \,\}$$

ตัวอย่าง 1.
พิจารณาเมทริกซ์ $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *เป็นการแปลงเมทริกซ์* $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *จงหา* $\ker \mathsf{T}$ *และ* $\operatorname{ran} \mathsf{T}$

วิธีทำ. *เนื่องจาก*

$$\begin{aligned} \ker \mathsf{T} &= \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

สังเกตว่า

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ดังนั้น

$$x_1 = x_3, \quad x_2 = 5x_3$$

และ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$\ker \mathsf{T} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ในขณะที่

$$\begin{aligned} \operatorname{ran} \mathsf{T} &= \operatorname{span}\{\, A_1, A_2, A_3 \,\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

จากท.บ.ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.
สำหรับเมทริกซ์ A *ขนาด* $m \times n$ *ซึ่ง* $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$
ถ้า $\mathsf{A} \sim \mathsf{U}$ *โดยที่* U *อยู่ในรูปขั้นบันได (echelon form) แล้วคอลัมน์ของ* A *ซึ่งสอดคล้องกับคอลัมน์ของ* U *ที่มีสมาชิกนำ (leading entry) เป็นสมาชิก จะประกอบขึ้นเป็นฐานหลักของ* $\operatorname{ran} \mathsf{T}$

เราจึงสรุปได้ทันทีจากท.บ. (2) และสมการ (1) *ว่า*

$$\operatorname{ran} \mathsf{T} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

นั่นเอง ■

บทนิยาม 2 (ศูนยภาพและค่าลำดับชั้น (Nullity and rank))**.**
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น*
เรานิยาม ***ศูนยภาพ (nullity)*** *ของ* T *ว่าเป็นมิติของ* $\ker \mathsf{T}$ *และเขียนแทนด้วย* $\operatorname{nullity} \mathsf{T}$
เรานิยาม ***ค่าลำดับชั้น (rank)*** *ของ* T *ว่าเป็นมิติของ* $\operatorname{ran} \mathsf{T}$ *และเขียนแทนด้วย* $\operatorname{rank} \mathsf{T}$

หมายเหตุ 3.
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น และมีเมทริกซ์ตัวแทน* A
สังเกตว่า

$$\operatorname{rank} \mathsf{T} = \operatorname{rank} \mathsf{A}$$

ทฤษฎีบท 4 (ความสัมพันธ์ระหว่างศูนยภาพและค่าลำดับชั้น)**.**
ถ้า $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *เป็นการแปลงเชิงเส้น แล้ว*

$$\boxed{\operatorname{nullity} \mathsf{T} + \operatorname{rank} \mathsf{T} = n}$$

ตัวอย่าง 5.
เมทริกซ์

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

นิยามการแปลงเมทริกซ์ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *ว่า* $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ *จงหา* $\operatorname{nullity} \mathsf{T}$ *และ* $\operatorname{rank} \mathsf{T}$

วิธีทำ. *เนื่องจาก*

$$\ker \mathsf{T} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ดังนั้น $\operatorname{nullity} \mathsf{T} = 1$ *และเนื่องจาก*

$$\operatorname{nullity} \mathsf{T} + \operatorname{rank} \mathsf{T} = 3$$

เพราะฉะนั้น $\operatorname{rank} \mathsf{T} = 3 - 1 = 2$ ■