4.1 **การแปลงเชิงเส้น** (Linear transformations)

การแปลงเชิงเส้น (Linear transformation)

บทนิยาม 1 (การแปลงเชิงเส้น (Linear transformation)**.**
ให้ $\mathcal{V}$ และ $\mathcal{W}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์
*เราเรียก **การแปลง (transformation)** $\mathsf{T}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ว่า **เชิงเส้น (linear)** ก็ต่อเมื่อ T สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้*

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \mathsf{T}(\boldsymbol{u}) + \mathsf{T}(\boldsymbol{v})$$
$$\mathsf{T}(c\boldsymbol{v}) = c\mathsf{T}(\boldsymbol{v})$$

สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathcal{V}$ และทุก ๆ สเกลาร์ c

ในบทนี้ เราพิจารณาเฉพาะกรณี $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ และ $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.
ให้ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ การแปลง T_1, $\mathsf{T}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ในข้อใดเป็นการแปลงเชิงเส้น

$$\mathsf{T}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ. *เฉพาะข้อ 1.* ■

บทนิยาม 2 (การแปลงเมทริกซ์ (Matrix transformation))**.**
ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
*เราเรียกการแปลง $\mathsf{T}_\mathsf{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ที่นิยามโดย $\boxed{\mathsf{T}_\mathsf{A}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}}$ ว่า **การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformation)** จาก $\mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}^m$*

ทฤษฎีบท 2.
ทุก ๆการแปลงเมทริกซ์บน $\mathbb{R}^n$ เป็นการแปลงเชิงเส้น

หมายเหตุ 3.
จากท.บ. (2) จะเห็นว่า เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ก่อน แล้วนิยามการแปลง T_A ว่า $\mathsf{T}_\mathsf{A}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ การแปลงนี้จะเป็นการแปลงเชิงเส้นบน $\mathbb{R}^n$
คำถามที่น่าสนใจคือ เมื่อกำหนดการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ บน $\mathbb{R}^n$ ก่อน เราสามารถจะหาเมทริกซ์ A ซึ่ง $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ ได้หรือไม่?
คำตอบคือได้ และมีอยู่ในทฤษฎีบทถัดไป

ทฤษฎีบท 4 (ทฤษฎีบทตัวแทน (Representation Theorem))**.**
ให้ $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ เป็นการแปลงเชิงเส้น เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งนิยามจาก

$$\mathsf{A} = [\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1)\ \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_n)]$$

*โดยที่ $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ คือฐานหลักมาตรฐานสำหรับ $\mathbb{R}^n$ เมทริกซ์นี้มีสมบัติว่า $\mathsf{T}(x) = \mathsf{A}\boldsymbol{x}$ สำหรับทุก ๆ เวกเตอร์ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ นั่นคือ การแปลงเชิงเส้น T แทนด้วย **เมทริกซ์ตัวแทน** A เทียบกับฐานหลักมาตรฐาน ยิ่งกว่านั้นเมทริกซ์ตัวแทน A นี้มีเพียงเมทริกซ์เดียว*

หมายเหตุ 5.
นับจากนี้ เวลากล่าวถึงเมทริกซ์ตัวแทน A เทียบกับฐานหลักมาตรฐานของการแปลงเชิงเส้น T เราจะละคำว่าเทียบกับฐานหลักมาตรฐาน และเรียกเพียงเมทริกซ์ตัวแทน A ของ T

ตัวอย่าง 6 (การแปลงเฉือน (Shear transformation))**.**
***การแปลงเฉือน (shear transformation)** ขนานกับแกน-x_1 ใน $\mathbb{R}^2$ แปลงจุด (x_1, x_2) ไปยังจุด $(x_1 + kx_2, x_2)$ ถ้าเราใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ จะได้ว่า*

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1, \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของ T และถ้า $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$

วิธีทำ. *เนื่องจาก $\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1$, $\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น เราสามารถนิยาม A โดย*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) & \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2k \\ -2 \end{bmatrix}$$

■

คำถาม 7 (การหมุนใน $\mathbb{R}^2$ (Rotation in $\mathbb{R}^2$))**.**
พิจารณาการแปลง $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งหมุนจุด (x_1, x_2) ทวนเข็มนาฬิกาไปด้วยมุม θ ถ้าเราใช้ฐานหลักมาตรฐาน $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ จะได้ว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของ T และถ้า $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหา $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*

คำถาม 8.
จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของการแปลงเชิงเส้น $\mathsf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*