3.2 กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

กระบวนการของแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)

บทนิยาม 1 (เวกเตอร์การฉาย, เวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (Projection, orthogonal projection))**.**
ให้เซต $\mathcal{S} = \{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \,\}$ *เป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *และให้* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$
เรานิยาม ***เวกเตอร์การฉาย (projection)*** *ของเวกเตอร์* $\boldsymbol{v}$ *บน* $\mathcal{U}$ *หรือ* $\operatorname{span}\mathcal{S}$ *ว่า*

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v} + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v} + \cdots + \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_m} \boldsymbol{v}}$$

เรานิยาม ***เวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection)*** *ของเวกเตอร์* $\boldsymbol{v}$ *บน* $\mathcal{U}$ *หรือ* $\operatorname{span}\mathcal{S}$ *ว่า*

$$\boxed{\boldsymbol{v} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{v} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{v} - \cdots - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_m} \boldsymbol{v}}$$

กระบวนการแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process) เป็นกระบวนการสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis) และฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) จากฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ของ $\mathbb{R}^n$
ให้เซต $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

ขั้นตอนที่ 1 ทำเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}_1$ ให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า $\boldsymbol{q}_1$
นั่นคือ

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ $\boldsymbol{u}_2$ บน $\operatorname{span}\{\, \boldsymbol{v}_1 \,\}$ และทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า $\boldsymbol{q}_2$
นั่นคือ

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ $\boldsymbol{u}_3$ บน $\operatorname{span}\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \,\}$ และทำให้เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า $\boldsymbol{q}_3$
นั่นคือ

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{u}_3 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{u}_3, \qquad \boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|}$$

ขั้นตอนที่ 4 ทำขบวนการเดิมซ้ำ หาเวกเตอร์การฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection) ของ $\boldsymbol{u}_p$ บน $\operatorname{span}\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{p-1} \,\}$ และทำให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยเรียกว่า $\boldsymbol{q}_p$
นั่นคือ

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{u}_p - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_1} \boldsymbol{u}_p - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_2} \boldsymbol{u}_p - \cdots - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}_{p-1}} \boldsymbol{u}_p, \qquad \boldsymbol{q}_p = \frac{\boldsymbol{v}_p}{\|\boldsymbol{v}_p\|}$$

เซต $\{\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p \,\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis) ของ $\mathcal{U}$
เซต $\{\, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_p \,\}$ เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ของ $\mathcal{U}$

ตัวอย่าง 1.
พิจารณา

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$ *จงสร้างฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthonormal basis) ของ* $\mathbb{R}^3$ *จาก* $\mathcal{B}$ *โดยใช้กระบวนการแกรม-ชมิท (Gram-Schmidt process)*

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*

ตัวอย่าง 2.
จากฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis) ที่ได้จากตัวอย่าง (1) ของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ *ให้* $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *จงหาค่าของ* α_1, α_2 *และ* α_3 *ที่ทำให้*

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{q}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{q}_3 \tag{1}$$

เมื่อ $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ *และ* $\boldsymbol{q}_3$ *เป็นสมาชิกในฐานหลักเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal basis)*

วิธีทำ. *ถ้าเราใช้ผลคูณจุด ทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย* $\boldsymbol{q}_1$ *จะพบว่า*

$$\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{u} = \alpha_1 \|\boldsymbol{q}_1\|^2 = \alpha_1$$

นั่นเอง ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา α_2 *และ* α_3 *ได้* ■