3.1 การตั้งฉาก (Orthogonality)

การตั้งฉากกันของเวกเตอร์ (Orthogonality)

ในหัวข้อนี้ เราจะพิจารณาถึงการตั้งฉากกันของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ก่อนอื่นเราทบทวนถึงความหมายของการตั้งฉากกันของเวกเตอร์

บทนิยาม 1 (การตั้งฉากกันของเวกเตอร์).
*เวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน (orthogonal)** ก็ต่อเมื่อ*

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

คำถาม 1.
จงหาค่า a ที่ทำให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-1\\a\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ ตั้งฉากกัน

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*

บทนิยาม 2 (เซตเชิงตั้งฉาก, เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthogonal set, orthonormal set)).
*เซตของเวกเตอร์ $\mathcal{S}=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\}$ ใน $\mathbb{R}^n$ เป็น**เซตเชิงตั้งฉาก (orthogonal set)** ก็ต่อเมื่อ $\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=0$ สำหรับทุก ๆ $i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ โดยที่ $i\neq j$*
*เราเรียกเซตเชิงตั้งฉาก $\mathcal{S}$ ว่า **เซตเชิงตั้งฉากปรกติ (orthonormal set)** ถ้าแต่ละเวกเตอร์ใน $\mathcal{S}$ มีขนาดหนึ่งหน่วย*

บทนิยาม 3 (ฐานหลักเชิงตั้งฉาก (Orthogonal basis)).
*เราเรียกฐานหลัก $\mathcal{B}$ ของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ว่าเป็น**ฐานหลักเชิงตั้งฉาก (orthogonal basis)** ของ $\mathbb{R}^n$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{B}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก.*

คำถาม 2.
จงแสดงว่า $\left\{\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของ $\mathbb{R}^3$

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*

บทนิยาม 4.
*ปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ และ $\mathcal{V}$ ของ $\mathbb{R}^n$ **ตั้งฉากกัน** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ และทุก ๆ $\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}$, $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ ตั้งฉากกัน*

ตัวอย่าง 3.
จงแสดงว่าปริภูมิย่อยต่อไปนี้ตั้งฉากกัน
$\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$, $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1.5\end{bmatrix}\right\}$

วิธีทำ. *ให้ $\boldsymbol{u}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$ และ $\boldsymbol{v}\in\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1.5\end{bmatrix}\right\}$ ดังนั้น*
$\boldsymbol{u}=\alpha\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ *และ* $\boldsymbol{v}=\beta\begin{bmatrix}-2\\1.5\end{bmatrix}$ *สำหรับบางค่าของ α และ β*

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\alpha\beta(6-6)=0$$

■

ตัวอย่าง 4.
จงหาฐานหลักของปริภูมิย่อย $\mathcal{U}$ ของ $\mathbb{R}^3$ ซึ่งนิยามจากสมการ

$$x-2y+z=0$$

วิธีทำ. *สังเกตว่าสมการนี้สามารถเขียนได้ในรูป $x=2y-z$ ดังนั้น*

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y-z\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y\\y\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-z\\0\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

เราสามารถแสดงได้ว่าเซต

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$$

เป็นฐานหลักของ $\mathcal{U}$ แต่ไม่ใช่ฐานหลักเชิงตั้งฉาก สังเกตว่า

$$\mathcal{U}=\operatorname{span}\mathcal{B}$$

■

ตัวอย่าง 5.
พิจารณา

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$$

ซึ่งเป็นฐานหลักของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ α_1, α_2 และ α_3 ที่ทำให้

$$\boldsymbol{u}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3$$

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน แต่จะเห็นว่าวิธีทำค่อนข้างยาว แต่ถ้าเราฐานหลักที่ใช้เป็นฐานหลักเชิงตั้งฉาก การคำนวณจะง่ายขึ้นมาก ดังจะได้กล่าวต่อไป*

บทนิยาม 5 (เวกเตอร์การฉาย (Projection)).
ให้ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ของ $\mathbb{R}^n$
*เรานิยาม**เวกเตอร์การฉาย (projection)** ของเวกเตอร์ $\boldsymbol{v}$ บนเวกเตอร์ $\boldsymbol{u}$ ว่า*

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}.}$$

คำถาม 6.
ให้ $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ และ $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}$ และ $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{u}$

วิธีทำ. *แสดงในห้องเรียน*