SCMA 165 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล
ภาคการศึกษาที่ 2, 2552 บทที่ 2 ปริภูมิเวกเตอร์ สัปดาห์ที่ 4

2.1 ปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย (Vector Spaces and Subspaces)

Definition 1 (ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector space)).
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตพร้อมด้วยตัวดำเนินการ ***การบวก (addition)*** *และ* ***การคูณด้วยสเกลาร์ (scalar multiplication)***
ถ้า $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ และ α เป็นสเกลาร์ การบวก $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v}$ เราใช้สัญลักษณ์

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$$

การคูณ $\boldsymbol{v}$ ด้วยสเกลาร์ α เราใช้สัญลักษณ์

$$\alpha \boldsymbol{v}$$

เราเรียก $\mathcal{V}$ พร้อมด้วยการดำเนินการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ว่า ***ปริภูมิเวกเตอร์ (vector space)*** *ก็ต่อเมื่อ axiom ต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับสมาชิก $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ ใน $\mathcal{V}$ และสเกลาร์ α, β ใด ๆ*

Axioms of Closure

(C1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

(C2) $\alpha \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$

Axioms of Addition

(A1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(A2) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

(A3) มีสมาชิก $\boldsymbol{0} \in \boldsymbol{V}$ เรียกว่า ***เอกลักษณ์การบวก*** *ของ $\mathcal{V}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$ สำหรับ $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$*

(A4) สำหรับแต่ละสมาชิก $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ จะมี $-\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ เรียกว่า ***ตัวผกผันการบวก*** *ของ $\boldsymbol{v}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$*

Axioms of Scalar Multiplication

(A5) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$

(A6) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$

(A7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(A8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

เราเรียกสมาชิกของ vector space $\boldsymbol{V}$ ว่าเวกเตอร์

Example 1.
เซตต่อไปนี้เป็นปริภูมิเตอร์

1. *เซตของเมทริกซ์ $\mathbb{R}^{m\times n}$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ*
2. *เซตของฟังก์ชันค่าจริง $\mathbf{F}(-\infty, \infty)$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ*
3. *เซตของฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$, $\mathbf{F}[a, b]$ พร้อมด้วยการบวก และการคูณด้วยสเกลาร์ปกติ*

Solution. *แสดงในห้องเรียน*

Definition 2 (ปริภูมิย่อย (Subspace)).
ให้ $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{V}$
เซต $\mathcal{U}$ เป็น ***ปริภูมิย่อย (subspace)*** *ของ $\mathcal{V}$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง*

สมบัติปิดการบวก (S1) : *$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$ สำหรับแต่ละ $\boldsymbol{u}$ และ $\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$*

สมบัติปิดการคูณด้วยสเกลาร์ (S2) : *$\alpha\boldsymbol{v} \in \mathcal{U}$ สำหรับทุก ๆ $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ และทุก ๆ สเกลาร์ α*

Example 2. *พิจารณาเซตของฟังก์ชันพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่าหรือเท่ากับ n, $\mathbf{P}_n$*

$$\mathbf{P}_n = \{\, a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \,\}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbf{F}(-\infty, \infty)$

Solution. *แสดงในห้องเรียน*

Example 3. *พิจารณาเซต $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ โดยที่*

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

จงแสดงว่า $\mathcal{U}$ เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Solution. *แสดงในห้องเรียน*