4.1 **การแปลงเชิงเส้น** (Linear transformations)

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ จงหาเมทริกซ์ตัวแทนของการแปลงเชิงเส้นต่อไปนี้

   (a) $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - 2x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. จงหาเมทริกซ์ตัวแทน A ของการแปลงเชิงเส้น T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ซึ่งมีสมบัติ

$$\mathsf{T}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. จงหาเมทริกซ์ตัวแทน A ของการแปลงเชิงเส้น T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ (ในข้อนี้ $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$)

   (a) T ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$$

   โดยที่ $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (b) T ซึ่งมีสมบัติว่าหมุนจุด (x, y) ทวนเข็มนาฬิกาไปด้วยมุม $-\pi/4$ เรเดียน

   (c) T ซึ่งมีสมบัติว่าสะท้อนจุด (x, y) เทียบกับเส้นตรง $y = x$ นั่นคือ

$$\mathsf{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + 2[(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}]$$

   โดยที่ $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$