SCMA 165 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล
ภาคการศึกษาที่ 2, 2552 บทที่ 2 ปริภูมิเวกเตอร์ สัปดาห์ที่ 4

2.1 ปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย (Vector Spaces and Subspaces)

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^2$ พร้อมด้วยการบวก $\oplus$ และการคูณด้วยสเกลาร์ $*$ ที่นิยามดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\alpha * \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   จงแสดงว่า $\mathcal{V}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

2. ให้ $\mathcal{V}$ เป็นเซตของคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) และนิยามการบวกว่า

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

   นิยามการคูณด้วยสเกลาร์ว่า

$$k(a, b) = (ka, 0)$$

   จงแสดงว่าให้เห็นว่า $\mathcal{V}$ ไม่ใช่ปริภูมิเวกเตอร์

3. เซตย่อยในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$
   (a) $\{ (x, y) \mid xy \geq 0 \}$
   (b) $\{ (x, y) \mid x = y \}$
   (c) $\{ (x, y) \mid x^2 = y^2 \}$
   (d) $\{ (x, y) \mid x = y^2 \}$

4. เซตในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^{2\times 2}$
   (a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$
   (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & a \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
   (c) $\{ \mathsf{A} \mid \mathsf{A}^k = 0$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก $k \}$
   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a + d = 0 \right\}$

5. เซตในข้อใดเป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbf{P}_2$
   (a) $\{ at + bt^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$
   (b) $\{ a + bt + ct^2 \mid a + 2b + 3c = 0 \}$
   (c) $\{ \boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}(0) = 0 \}$
   (d) $\{ a + bt \mid a, b \in \mathbb{R} \}$